

独当一面

1. 2020~2021学年天津南开区初三上学期期中第4题3分 ★★

下列各点中，在二次函数 $y = x^2 - 8x - 9$ 图象上的点是（ ）.

- A. (1, -16) B. (-1, -16) C. (-3, -8) D. (3, 24)

【答案】 A

【解析】 A 选项：将 $x = 1$ 代入 $y = x^2 - 8x - 9$ 得：

$$y = 1^2 - 8 \times 1 - 9 = 1 - 8 - 9 = -16,$$

故 A 正确；

B 选项：将 $x = -1$ 代入 $y = x^2 - 8x - 9$ 得：

$$y = (-1)^2 - 8 \times (-1) - 9 = 1 + 8 - 9 = 0 \neq -16,$$

故 B 错误；

C 选项：将 $x = -3$ 代入 $y = x^2 - 8x - 9$ 得：

$$y = (-3)^2 - 8 \times (-3) - 9 = 9 + 24 - 9 = 24 \neq -8,$$

故 C 错误；

D 选项：将 $x = 3$ 代入 $y = x^2 - 8x - 9$ 得：

$$y = 3^2 - 8 \times 3 - 9 = 9 - 24 - 9 = -24 \neq 24,$$

故 D 错误.

故选 A.

【标注】【知识点】点在二次函数图象上

2. 2020~2021学年天津和平区初三上学期期中第4题3分 ★★

已知函数 $y = 2(x + 1)^2 + 1$ 则（ ）.

- A. 当 $x < 1$ 时， y 随 x 的增大而增大 B. 当 $x < 1$ 时， y 随 x 的增大而减小
C. 当 $x < -1$ 时， y 随 x 的增大而增大 D. 当 $x < -1$ 时， y 随 x 的增大而减小

【答案】 D

【解析】 由给出的顶点式可知函数的对称轴为 $x = -1$ ，

由函数解析式知开口向上，

则在对称轴左侧，函数 y 随 x 的增大而减小，

在对称轴右侧，函数 y 随 x 的增大而增大.

【标注】【题型】二次函数增减性

3. 2020~2021学年天津红桥区初三上学期期中第8题3分 ★★

若点 $A(-3, y_1)$, $B(-2, y_2)$, $C(2, y_3)$ 都在二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象上, 则 y_1 , y_2 , y_3 的大小关系是 () .

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_2 < y_1 < y_3$ C. $y_3 < y_2 < y_1$ D. $y_3 < y_1 < y_2$

【答案】 C

【解析】 $\because A(-3, y_1)$, $B(-2, y_2)$, $C(2, y_3)$ 为二次函数

$y = x^2 - 2x - 3$ 的图象上的三点,

$$\therefore y_1 = 9 + 6 - 3 = 12,$$

$$\text{即 } y_1 = 12,$$

$$y_2 = 4 + 4 - 3 = 5, \text{ 即 } y_2 = 5,$$

$$y_3 = 4 - 4 - 3 = -3, \text{ 即 } y_3 = -3,$$

$$\therefore -3 < 5 < 12,$$

$$\therefore y_3 < y_2 < y_1.$$

故选 C.

【标注】 【知识点】 点在二次函数图象上

4. 2015~2016学年天津和平区初三上学期期中第5题3分 ★★

把抛物线 $y = x^2$ 向上平移 3 个单位, 再向右平移 1 个单位, 则平移后抛物线的解析式为 () .

- A. $y = (x + 3)^2 + 1$ B. $y = (x + 3)^2 - 1$ C. $y = (x - 1)^2 + 3$ D. $y = (x + 1)^2 + 3$

【答案】 C

【解析】 由“上加下减”的原则可知, 把抛物线 $y = x^2$ 向上平移 3 个单位所得抛物线的解析式为:

$$y = x^2 + 3,$$

由“左加右减”的原则可知, 把抛物线 $y = x^2 + 3$ 向右平移 1 个单位所得抛物线的解析式

$$\text{为: } y = (x - 1)^2 + 3.$$

【标注】 【能力】 运算能力

【知识点】 二次函数平移变换

5. 2020年浙江杭州中考真题第10题3分 ★★★

在平面直角坐标系中, 已知函数 $y_1 = x^2 + ax + 1$, $y_2 = x^2 + bx + 2$, $y_3 = x^2 + cx + 4$, 其中 a , b , c 是正实数, 且满足 $b^2 = ac$. 设函数 y_1 , y_2 , y_3 的图象与 x 轴的交点个数分别为 M_1 , M_2 , M_3 , ()

A. 若 $M_1 = 2$, $M_2 = 2$, 则 $M_3 = 0$

B. 若 $M_1 = 1$, $M_2 = 0$, 则 $M_3 = 0$

C. 若 $M_1 = 0$, $M_2 = 2$, 则 $M_3 = 0$

D. 若 $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, 则 $M_3 = 0$

【答案】 B

【解析】 设 3 个函数的判别式分别为 $\Delta_1 = a^2 - 4$,

$$\Delta_2 = b^2 - 8,$$

$$\Delta_3 = c^2 - 16,$$

$$\because b^2 = ac,$$

$$\therefore c = \frac{b^2}{a},$$

$$\text{A选项, 若 } M_1 = 2, M_2 = 2, \text{ 则 } \Delta_1 = a^2 - 4 > 0, \Delta_2 = b^2 - 8 > 0,$$

$$\therefore a > 2, b^2 > 8,$$

$$\therefore c = \frac{b^2}{a} \text{ 与 } 4 \text{ 无法比较大小},$$

$$\therefore \Delta_3 = c^2 - 16 \text{ 无法确定, 故 A 错误};$$

$$\text{B选项, 若 } M_1 = 1, M_2 = 0, \text{ 则 } \Delta_1 = a^2 - 4 = 0, \Delta_2 = b^2 - 8 < 0,$$

$$\therefore a = 2, 0 < b^2 < 8,$$

$$\therefore c = \frac{b^2}{a} < \frac{8}{2} = 4,$$

$$\therefore \Delta_3 = c^2 - 16 < 0,$$

$$\therefore M_3 = 0, \text{ 故 B 正确};$$

$$\text{C选项, 若 } M_1 = 0, M_2 = 2, \text{ 则 } \Delta_1 = a^2 - 4 < 0, \Delta_2 = b^2 - 8 > 0,$$

$$\therefore 0 < a < 2, b^2 > 8,$$

$$\therefore c = \frac{b^2}{a} > 4,$$

$$\therefore \Delta_3 = c^2 - 16 > 0,$$

$$\therefore M_3 = 2, \text{ 故 C 错误};$$

$$\text{D选项, 若 } M_1 = 0, M_2 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta_1 = a^2 - 4 < 0, \Delta_2 = b^2 - 8 < 0,$$

$$\therefore 0 < a < 2, 0 < b^2 < 8,$$

$$\therefore c = \frac{b^2}{a} \text{ 与 } 4 \text{ 无法比较大小},$$

$$\therefore \Delta_3 = c^2 - 16 \text{ 无法确定, 故 D 错误}.$$

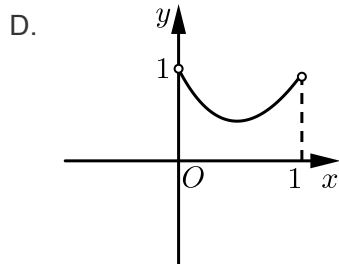
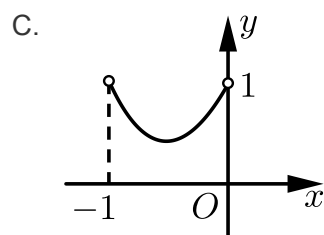
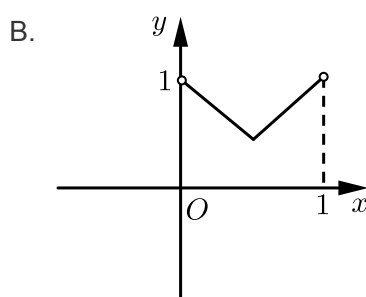
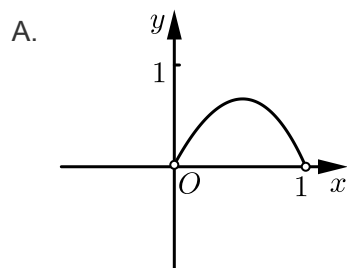
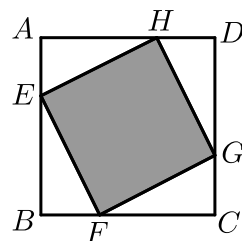
故选 B.

【标注】 【知识点】 二次函数与坐标轴交点

6. 2020~2021 学年天津红桥区初三上学期中第 12 题 3 分 ★★★

如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, E, F, G, H 分别为各边上的点, 且 $AE = BF = CG = DH$.

设四边形 $EFGH$ 的面积为 S , $AE = x$, 则 S 关于 x 的函数图象大致是 ().



【答案】 D

【解析】 ∵根据正方形的四边相等，四个角都是直角，且 $AE = BF = CG = DH$,

∴可证 $\triangle AEH \cong \triangle BFE \cong \triangle CGF \cong \triangle DHG$.

设 AE 为 x ，则 $AH = 1 - x$ ，根据勾股定理，得

$$EH^2 = AE^2 + AH^2 = x^2 + (1 - x)^2,$$

$$\text{即 } y = x^2 + (1 - x)^2.$$

$$y = 2x^2 - 2x + 1,$$

∴所求函数是一个开口向上，

对称轴是直线 $x = \frac{1}{2}$.

∴自变量的取值范围是大于 0 小于 1.

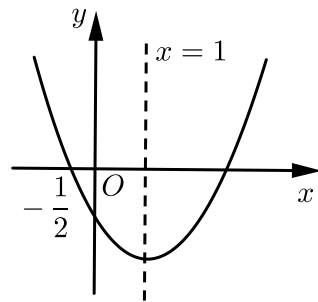
故选 D.

【标注】 【知识点】由动点判断函数图象

7. 2020~2021 学年天津南开区初三上学期期中第 12 题 3 分 ★★★

如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象经过点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ ，对称轴为直线 $x = 1$ ，下列 5 个结

论：① $abc < 0$ ；② $a - 2b + 4c = 0$ ；③ $2a + b > 0$ ；④ $2c - 3b < 0$ ；⑤ $a + b \leq m(am + b)$ 。其中正确的结论有 ()。



A. 4个

B. 3个

C. 2个

D. 1个

【答案】 C

【解析】 ①函数的对称轴在 y 轴右侧，

则 $ab < 0$ ，而 $c < 0$ ，故 $abc > 0$ ，故①错误，不符合题意；

②将点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 代入函数表达式得： $a - 2b + 4c = 0$ ，故②正确，符合题意；

③函数的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$ ，

即 $b = -2a$ ，故 $2a + b = 0$ ，故③错误，不符合题意；

④由②③得： $a - 2b + 4c = 0$ ， $b = -2a$ ，

则 $c = -\frac{5a}{4}$ ，故 $2c - 3b = \frac{7a}{2} > 0$ ，故④错误，不符合题意；

⑤当 $x = 1$ 时，函数取得最小值，

即 $a + b + c \leq m(am + b) + c$ ，故⑤正确，符合题意。

故选 C。

【标注】【知识点】关于 a 、 b 、 c 代数式的取值问题

8. 2021年天津中考真题第12题3分 ★★

已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数， $a \neq 0$) 经过点 $(-1, -1)$ ， $(0, 1)$ ，当 $x = -2$ 时，与其对应的函数值 $y > 1$ 。有下列结论：

① $abc > 0$ ；

②关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c - 3 = 0$ 有两个不等的实数根；

③ $a + b + c > 7$ 。

其中，正确结论的个数是 ()。

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】 D

【解析】 $\because$ 抛物线经过点 $(0, 1)$ 代入抛物线则有 $1 = 0 + 0 + c$ ，解得 $c = 1$ ，

故 $y = ax^2 + bx + 1$ ，

$\because$ 点 $(-1, -1)$ 在抛物线上，则有 $-1 = a - b + 1$ ，

$$a = b - 2 ,$$

$$\text{则有 } y = (b - 2)x^2 + bx + 1 ,$$

当 $x = -2$ 时, $y > 1$, 则有

$$4(b - 2) - 2b + 1 > 1 ,$$

$$4b - 8 - 2b > 0 ,$$

$$2b > 8 ,$$

$$b > 4 ,$$

$$\therefore a = b - 2 \text{ 且 } b > 4 ,$$

$$\therefore a > 2 ,$$

$$\therefore abc > 0 , \text{ 故①正确 ;}$$

$$a + b + c = a + b + 1 > 7 , \text{ 故③正确 ;}$$

关于 x 的方程 ,

$$ax^2 + bx + c - 3 = 0 \text{ 可变形为 } (b - 2)x^2 + bx + 1 - 3 = 0 ,$$

$$(b - 2)x^2 + bx - 2 = 0 ,$$

$$\Delta = b^2 - 4(b - 2) \times (-2)$$

$$= b^2 + 8b - 16$$

$$= b^2 + 8b + 16 - 32$$

$$= (b + 4)^2 - 32 ,$$

$$\therefore b > 4 ,$$

$$\therefore (b + 4)^2 > 32 , \text{ 故 } (b + 4)^2 - 32 > 0 ,$$

$$\text{即 } \Delta > 0 ,$$

故关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c - 3 = 0$ 有两个不相等的实数根, 故②正确,

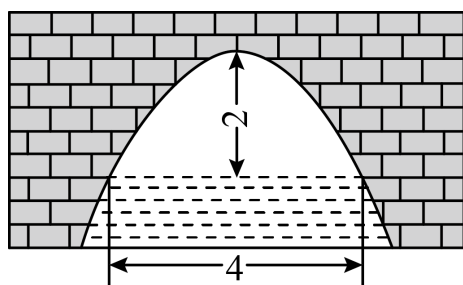
综上所述, 正确的有①②③共 3 个.

故选 D.

【标注】【知识点】关于 a 、 b 、 c 代数式的取值问题

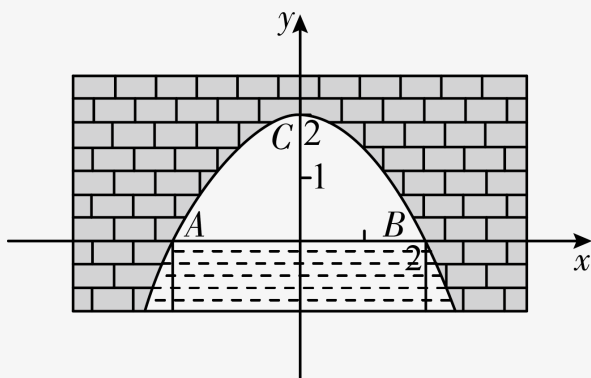
9. 2017~2018 学年河南新乡卫辉市初三上学期期末 ★★★

如图是一个横断面为抛物线形状的拱桥, 当水面宽 4 米时, 拱顶(拱桥洞的最高点)离水面 2 米, 水面下降 1 米时, 水面的宽度为 ____ 米.



【答案】 $2\sqrt{6}$

【解析】 建立如图所示的平面直角坐标系，



则抛物线顶点 C 坐标为 $(0, 2)$ ，可设 $y = ax^2 + 2$ ，把 A 点坐标 $(-2, 0)$ 代入得：

$a = -0.5$ ，所以抛物线解析式为 $y = -0.5x^2 + 2$ ，当水面下降 1 米，通过抛物线在图上的观察可转化为：当 $y = -1$ 时，对应的抛物线上两点之间的距离，也就是直线 $y = -1$ 与抛物线相交的两点之间的距离，可以通过把 $y = -1$ 代入抛物线解析式得出：

$-1 = -0.5x^2 + 2$ ，解得： $x = \pm\sqrt{6}$ ，所以水面宽度增加到 $2\sqrt{6}$ 米。

考点：二次函数的应用。

10. 2020~2021 学年天津南开区初三上学期期中第 23 题 10 分 ★★★

已知超市中某商品的进价为每件 20 元，售价为每件 30 元，每个月可卖出 180 件，如果每件商品的售价每上涨 1 元，则每个月就会少卖出 10 件，但每件售价必须低于 34 元，设每件商品的售价上涨 x 元（ x 为非负整数），每个月的销售利润为 y 元。

- (1) 求 y 与 x 的函数关系式，并直接写出自变量 x 的取值范围。
- (2) 利用函数关系式求出每件商品的售价为多少元时，每个月可获得最大利润？最大利润是多少？
- (3) 利用函数关系式求出每件商品的售价定为多少元时，每个月的利润恰好是 1920 元？这时每件商品的利润率是多少？

【答案】 (1) $y = -10x^2 + 80x + 1800$ ($0 \leq x < 4$ ，且 x 为整数)

(2) 每件售价为 33 元时，每个月可获得最大利润，最大利润是 1950 元。

(3) 60%。

【解析】 (1) 依题意， $y = (30 - 20 + x)(180 - 10x)$ ，

化简得， $y = -10x^2 + 80x + 1800$ ($0 \leq x < 4$ ，且 x 为整数)。

(2) 由 (1) 得， $y = -10x^2 + 80x + 1800 = -10(x - 4)^2 + 1960$ ，

$\because a = -10 < 0$ ，

$\therefore$ 当 $x < 4$ 时， y 随着 x 的增大而增大，

$\because 0 \leq x < 4$, 且 x 为整数 ,

$\therefore$ 当 $x = 3$ 时 , $y_{\text{最大}} = -10(3 - 4)^2 + 1960 = 1950$.

故每件商品的售价为 33 元时 , 每个月可获得最大利润 , 最大利润是 1950 元 .

(3) 由题意 , $1920 = -10x^2 + 80x + 1800$,

整理得 , $x^2 - 8x + 12 = 0$, 解得 $x_1 = 2$ 或 $x_2 = 6$,

$\because 0 \leq x < 4$, 且 x 为整数 ,

$\therefore x = 2$,

$\therefore$ 此时的售价为 32 元 , 则利润率为 : $\frac{32 - 20}{20} \times 100\% = 60\%$.

故每件商品的售价为 32 元 , 每个月的利润恰好是 1920 元 , 这时每件商品的利润率是 60% .

【标注】【知识点】二次函数的利润问题